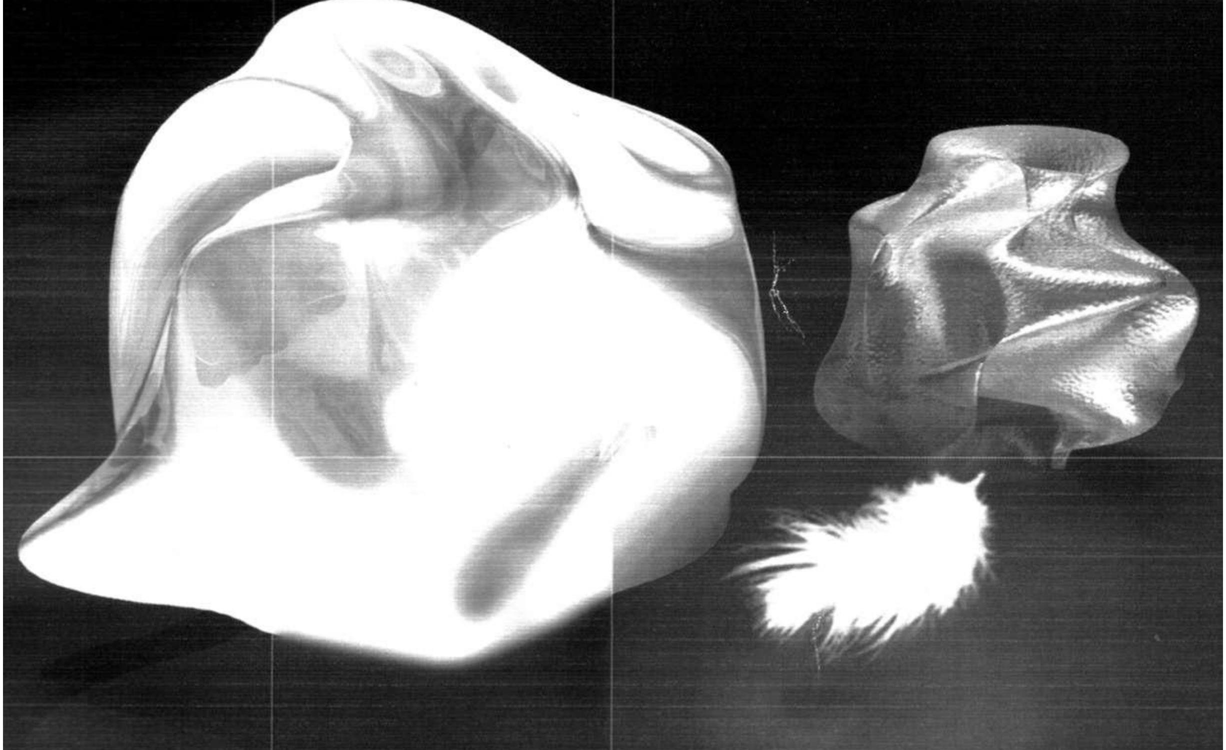
Том 3, № 4, Декабрь 2008 ISSN 1819-4362

НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ и мягкие вычисления



Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений

УДК 519.72

О НЕЧЕТКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЭКОНОМИКЕ

Рыжов А.П., Тимирова А.Н.
Кафедра математической теории интеллектуальных систем,
механико-математический факультет, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва

Поступила в редакцию 07.09.2008, после переработки 03.10.2008.

Работа посвящена исследованию свойств нечетких моделей в экономике. Исследуется вопрос зависимости качества работы модели от качества исходной информации. Рассматривается нечеткая модель разделения на торговые зоны. Качество исходной информации оценивается как степень нечеткости соответствующих отношений «товар - потребительское качество» и «товар - фирма». Доказано, что монотонность отклика модели по отношению к степени нечеткости не сохраняется в общем случае. Подробно исследуются частные случаи, когда зависимость решения от качества исходной информации существует. Это выполняется лишь при соблюдении весьма искусственных ограничений. Оказывается также, что применение других операций с исходными матрицами также не приводит к сохранению степени нечеткости. Таким образом, анализируемая модель не позволяет гарантировать качество результата как функцию качества исходных данных, что требует осторожности при ее практическом применении.

This paper analyzes properties of fuzzy models in economics. We investigate a question of dependence model work quality and initial data quality. Fuzzy model separating trade zones is considered. Initial data quality is estimated as a fuzziness degree of relations «goods - property» and «goods - firm». It is proved that model response monotonicity doesn't survive fuzziness degree in general case. Sometimes there exists a relationship between the model answer and initial data quality. Such particular cases are investigated in detail. They are performed in highly artificial constraints. Also other operation application doesn't lead to fuzziness degree preservation. Thereby analyzing model doesn't guarantee that model work quality is a function of initial data quality and should be used carefully.

Ключевые слова: нечеткая модель, устойчивость.
Keywords: fuzzy model, stability.

1. Введение

В работе рассматривается задача оценки связи качества исходной информации и качества решения для математических моделей в экономике, ориентированных на обработку нечеткой информации. Такие модели находят все большее распространение. Блоки обработки нечеткой информации присутствуют в большинстве современных пакетов математического моделирования экономических процессов и явлений и автоматизированных рабочих мест операторов экономической деятельности (биржевых брокеров, финансовых аналитиков, оценщиков и т.п.). Характерные постановки экономических задач, где применение нечетких множеств достигает впечатляющих результатов: стратегическое планирование, комплексный анализ состояния корпорации, кредитоспособность заемщика банка, оценка риска инвестиционного проекта, оптимизация фондового портфеля, оценка инвестиционной привлекательности ценных бумаг, прогнозирование фондовых индексов. Поэтому оценка качества таких моделей является актуальной и практически важной задачей.

Методы, построенные на базе нечетких множеств, используются активно. Однако важным вопросом является изучение зависимости качества исходной информации и качества решения, в результате работы алгоритма. Очевидно, что если изначально исходная информация плохая, то и результат будет плохим.

В работе рассматривается нечеткая модель разделения на торговые зоны. Качество исходной информации оценивается как степень нечеткости соответствующих отношений «товар - потребительское качество» и «товар - фирма». Показано, что в случае максимальной неопределенности (все отношения равновозможны) мы получаем максимально неопределенный ответ модели. Далее, ставится задача исследовать монотонность отклика модели по отношению к степени нечеткости. Для этого вводится понятие степени нечеткости отношения. Для простейшей степени нечеткости(линейная функция) доказывается, что искомая монотонность сохраняется лишь при соблюдении достаточно сильных ограничений. Приводятся соответствующие контрпримеры. Выделены частные случаи, когда монотонность сохраняется. Доказывается более общее утверждение о том, что не существует степени нечеткости, сохраняющей монотонность для данной модели.

Далее предпринимается попытка заменить используемые в модели операции (умножение матриц с последующей нормировкой) на минимаксную композицию операций, в которой умножение заменяется на минимум, а сумма на максимум. Минимаксная композиция - основа систем нечеткого логического вывода и является наиболее распространенным, классической композицией в теории нечетких множеств. Доказывается, что монотонность не выполняется и в этом случае. Полученные результаты говорят о том, что исследуемая модель не демонстрирует разумного поведения, и ее применение в практических задачах может привести к некорректным результатам.

2. Нечетко-множественный подход к построению моделей в экономике

Сегодня одним из наиболее перспективных направлений научных исследований в области анализа, прогнозирования и моделирования экономических явлений и процесов [6] является нечеткая логика .

Годом рождения данного научного направления можно считать 1965 г., когда Л.А. Заде (Lotfi A. Zadeh), профессор информатики Калифорнийского Университета в Беркли (Berkeley), ввел в науку понятие «нечеткие множества» (fuzzy set), давшее название новой теории (fuzzy logic) [17].

Методы теории нечетких множеств начинают применяться в экономике начиная с конца 70-х годов. Следует упомянуть работы Дж. Бакли «Решение нечетких уравнений в экономике и финансах» и «Нечеткая математика в финансах» [9, 10], Г. Бояджиева, М. Бояджиева «Нечеткая логика в бизнесе, финансах и менеджменте» [8].

В 80-х начали появляться программные решения и информационные технологии, решающие экономические задачи с применением нечетко-множественных и родственных им описаний. Так, под руководством Ц. Зопоунидиса в Техническом университете на острове Крит была разработана экспертная система для детального финансового анализа корпораций [19]. Чуть раньше в Германии, в конце 80-х годов, группой под руководством Х. Циммермана была разработана система стратегического планирования [18], в которой реализуется позиционирование бизнеса корпорации на основе нечетких описаний конкурентоспособности и привлекательности бизнеса.

Некоторое количество работ посвящено макроэкономическому анализу фондового рынка на основе нечетких представлений: К. Пирэй «Нечетко - множественный анализ инвестиционной деятельности взаимных фондов» [12]. Также нечеткие представления были положены в основу нейронных сетей для прогнозирования фондовых индексов: Г.А. Гунин «Особенности практического применения искусственных нейронных сетей к прогнозу финансовых временных рядов» [5].

Довольно быстро экономические приложения теории нечетких множеств образовали самостоятельное научное направление. Была создана международная ассоциация SIGEF (International Association for Fuzzy Set Management & Economy) со штаб квартирой в Барселоне, которая регулярно апробирует новые результаты в области нечетко-множественных экономических исследований, проводя ежегодные конференции и выпуская журнал «Fuzzy Economic Review».

2.1 Модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях

В работе [4] проводится теоретический анализ проблемы разделения на торговые зоны в нечетких условиях. Такие допущения, как постоянство транспортных расходов и одинаковые достоинства фирм, заменяются нечетким восприятием расстояния и привлекательностью фирм относительно различных характерных свойств. Предпочтение, отдаваемое потребителями той или иной фирме, представляется в виде выпуклого нечеткого подмножества для исследования перекрытия торговых зон. Устанавливается порог разделения. В этом подходе вместо четко очерченного описания торговых зон в традиционном анализе используется степень разделения.

Предложен метод исследования разделения торговых зон в нечетких условиях, когда информация по своей природе неполная и решение потребителя о поездке неточно. Допущения об однородности рынка ослаблены, насколько это возможно, с тем, чтобы число допущений при построении моделей было минимальным. Основу метода исследования составляет теория нечетких множеств. Хотя эта теория уже применялась к общему анализу поведения человека [13] и, в частности, к анализу пространственной экономической активности [14–16], фундаментальное понятие разделения торговых зон между фирмами подробно не рассматривалось.

В исследовании упор делается на теоретическое осмысление разделимости торговой зоны. В модели в качестве факторов, влияющих на принятие потребителем решения о поездке, рассматриваются социально-психологические и экономические переменные.

Общая модель разделения торговой зоны. Пусть на рынке имеется несколько конкурирующих фирм, производящих продукцию одного качества. Фирмы характеризуются p признаками. Потребители при выборе фирмы руководствуются степенью важности признаков: одна фирма предпочитается другой, если ее признаки по своей степени важности более близки к оценке потребителя.

Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ — множество покупателей, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$ — множество признаков фирм и $Z = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ — множество фирм.

Пусть $\Phi_R : X \times Y \to [0,1]$ есть функция принадлежности нечеткого бинарного отношения R. Для всех $x \in X$ и всех $y \in Y$ функция $\Phi_R(x,y)$ – степень важности признака y по оценке покупателя x.

Отношение R можно представить в матричной форме

$$R = \begin{pmatrix} \Phi_R(x_1,y_1) & \Phi_R(x_1,y_2) & \dots & \Phi_R(x_1,y_p) \\ \Phi_R(x_2,y_1) & \Phi_R(x_2,y_2) & \dots & \Phi_R(x_2,y_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_R(x_n,y_1) & \Phi_R(x_n,y_2) & \dots & \Phi_R(x_n,y_p) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\pi_S : Y \times Z \to [0,1]$ есть функция принадлежности нечеткого бинарного отношения S. Для всех $y \in Y$ и всех $z \in Z$ $\pi_S(y,z)$ есть степень совместимости фирмы z с признаком y. В матричной форме отношение S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \pi_S(y_1,z_1) & \pi_S(y_1,z_2) & \dots & \pi_S(y_1,z_m) \\ \pi_S(y_2,z_1) & \pi_S(y_2,z_2) & \dots & \pi_S(y_2,z_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_S(y_p,z_1) & \pi_S(y_p,z_2) & \dots & \pi_S(y_p,z_m) \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу T:

$$T = \begin{pmatrix} \mu_{A_1}(x_1,z_1) & \mu_{A_2}(x_1,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_1,z_m) \\ \mu_{A_1}(x_2,z_1) & \mu_{A_2}(x_2,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_2,z_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{A_1}(x_n,z_1) & \mu_{A_2}(x_n,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_n,z_m) \end{pmatrix},$$

элементы которой определяются функцией принадлежности

$$\mu_{A_i}(x_j,z_i) = \frac{\sum\limits_y \Phi(x_j,y)\pi(y,z_i)}{\sum\limits_y \Phi(x_j,y)} \quad \text{для всех } x \in X,\ y \in Y \text{ и } z \in Z.$$

$\mu_{A_i}(x,z_i)$ можно интерпретировать как взвешенную степень *предпочтения фирмы* z_i покупателем x.

Функция предпочтения, описываемая уравнением (1), удовлетворяет определению выпуклого нечеткого подмножества

$$\mu_{A_i}[\lambda(x_1,z_i) + (1-\lambda)(x_2,z_i)] \geq \min[\mu_{A_i}(x_1,z_i), \mu_{A_i}(x_2,z_i)]$$

для всех x_1 и x_2, всех $z_i \in Z$ и всех $\lambda \in [0,1]$.

Поскольку все $\mu_{A_i}(x,z_i)$ выпуклые, их пересечения также выпуклые функции. Таким образом, можно построить матрицы W :

$$W = \begin{pmatrix} \mu_{A_1}(x_1,z_1) \wedge \mu_{A_2}(x_1,z_2) & \dots & \mu_{A_{m-1}}(x_1,z_{m-1}) \wedge \mu_{A_m}(x_1,z_m) \\ \mu_{A_1}(x_2,z_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2,z_2) & \dots & \mu_{A_{m-1}}(x_2,z_{m-1}) \wedge \mu_{A_m}(x_2,z_m) \\ & \dots & \\ \mu_{A_1}(x_n,z_1) \wedge \mu_{A_2}(x_n,z_2) & \dots & \mu_{A_{m-1}}(x_n,z_{m-1}) \wedge \mu_{A_m}(x_n,z_m) \end{pmatrix}.$$

Порог разделения торговой зоны [11] в данной модели может быть ограничен условием

$$l < \min_{ij} \max_{x} \min[\mu_{A_i}(x, z_i), \mu_{A_j}(x, z_j)].$$

Если порог l выбран, то торговая зона M_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ описывается уровневым множеством

$$M_i = \{x | \ \mu_{A_i}(x) \geq l, x \in M_i\}.$$

3. Аппарат нечеткой логики

Следуя Заде [17], введем понятие нечеткое множество следующим образом. Пусть U - некоторое множество элементов u, и $\mu_A : U \to [0, 1]$.

Определение 1. *Нечетким множеством A в U называется график отображения μ_A, то есть множество вида $\{(u, \mu_A(u)) : u \in U\}$; при этом значение $\mu_A(u)$ называется степенью принадлежности u к A.*

Таким образом, задание нечеткого подмножества A в U эквивалентно заданию его функции принадлежности $\mu_A(u)$.

3.1 Измерение степени нечеткости множества

Нечеткие множества могут иметь разную степень нечеткости. Меры нечеткости важны в приложениях теории нечетких множеств. Этот показатель является параметром оценки качества различных процедур и алгоритмов в распознавании образов, принятии решений, моделях поиска информации [2] - [3] и т.п.

3.1.1 Метрический подход

Основная идея этого подхода к измерению степени нечеткости множеств базируется на использовании понятия расстояния между нечеткими множествами

Идея метрического подхода заключается в оценке степени нечеткости как расстояния между оцениваемым множеством и некоторым множеством с известной степенью нечеткости.

Для строгого определения этой идеи нам понадобятся ряд понятий.

Пусть A - нечеткое множество. Обычное множество $\check{A}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\check{A}}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(u) < 0,5 \\ 1, & \text{если } \mu_A(u) > 0,5 \\ 0 \ \text{ или } \ 1, & \text{если } \mu_A(u) = 0,5 \end{cases}$$

называется ближайшим к нечеткому множеству A.

Будем называть множество A^* с известной степенью нечеткости базисным множеством.

Пример 1. *В качестве примеров базисных множеств можно привести:*

1) $A^* = \check{A}$; Это множество определяется множеством A и имеет степень нечеткости, равную нулю. Чем больше расстояние от некоторого множества до его ближайшего четкого множества, тем больше степень его нечеткости.

2) $A^* = A_{0,5}$, где $\mu_{A_{0,5}}(u) = 0.5 \quad \forall u \in U$. Это максимально нечеткое множество. Чем ближе к нему некоторое нечеткое множество, тем больше степень его нечеткости.

Теперь мы можем дать определение степени нечеткости множества.

Определение 2. *Пусть f - некоторая монотонная функция, $\rho(x,y)$ - метрика в $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, A^* - базисное множество, тогда степенью нечеткости $\xi(A)$ нечеткого множества A называется значение $\xi(A) = f[\rho(A, A^*)]$.*

Функция f подбирается для удовлетворения некоторым естественным требованиям для степени нечеткости, которые определяются для каждой задачи.

Примерами таких требований могут быть изменение степени нечеткости в пределах от 0 до 1, равенство степени нечеткости нулю для обычного множества и т.п. Ниже приводятся примеры конкретных функционалов, измеряющих степень нечеткости.

Пример 2. *В качестве примеров степени нечеткости можно привести:*
1) $\xi_1(A) = 2\varepsilon(A, \check{A})$; $\quad 0 \le \xi_1(A) \le 1$;
2) $\xi_2(A) = 1 - 2d(A, A_{0,5})$; $\quad 0 \le \xi_2(A) \le 1$.

3.1.2 Аксиоматический подход

Основная идея аксиоматического подхода заключается в формулировании некоторых «естественных» требований (аксиом) к степени нечеткости, и поиске конкретных функционалов, удовлетворяющих этим требованиям.

Обычно пользуются следующими аксиомами степени нечеткости множества [1].

$P1$. $\xi(A) = 0$ (минимально) для ситуации, когда A - обычное множество;

$P2$. $\xi(A_{0,5}) = 1$ (максимально);

$P3$. $\xi(A) \le \xi(B)$, если $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) < 0.5$ и $\mu_A(u) \ge \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) > 0.5$ (в этом случае говорят, что A является заострением B);

$P4$. $\xi(A) = \xi(\bar{A})$ (симметриченость по отношению к $0,5$).

Иногда дабавляется аксиома $P5$.

$P5$. $\xi(A \cup B) + \xi(A \cap B) = \xi(A) + \xi(B)$, т.е. ξ является оценкой на решетке $P(U)$.

Нетрудно проверить, что приведенные в примере 2 функционалы удовлетворяют данным аксиомам. И обратно, с помощью подбора функции f в рамках метрического подхода (определение 2) можно добиться удовлетворения $P1, P2$; монотонность f и использование в качестве аргумента расстояния до обычного или максимально нечеткого множества гарантирует выполнение $P3, P4$.

3.2 Измерение степени нечеткости матриц

Обобщим понятие степени нечеткости множеств для матриц.

Определение 3. *Степенью нечеткости матрицы A, элементы которой принадлежат $[0,1]$, называется функция*

$$\xi(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{i,j} \mu(a_{ij}),$$

где $|A|$ - количество элементов в матрице.

Рассмотрим конкретную степень нечеткости(меру): $\mu(u) = 1 - |2u - 1|$, где $u \in [0,1]$. Тогда,

$$\xi(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{i,j} 1 - |2a_{ij} - 1|.$$

Для этой степени нечеткости выполнено:
$\xi(A) = 0$ - в самом четком случае, т.е. когда все элементы $\in \{0,1\}$;
$\xi(A) = 1$ - в самом нечетком случае, когда все элементы матрицы равны 0.5;
$\xi(A) \in (0,1)$ - во всех остальных случаях.

4. Изучение свойств модели разделения на торговые зоны в нечетких условиях

Мы пытаемся понять зависимость степени нечеткости результата от степени нечеткости исходных данных. Будем рассматривать экономическую модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях.

4.1 Модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях

По исходным матрицам R(клиент—признак), S(признак—фирма) получаем матрицу T(клиент—фирма):

$$\underset{[n\times m]}{T} = \underset{[n\times p]}{R} * \underset{[p\times m]}{S},$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{np} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & \dots & s_{pm} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{pm} \end{pmatrix},$$

где $r_{ij}, s_{ij} \in [0,1]$, $t_{ij} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p} r_{ik} \cdot s_{kj}}{\sum\limits_{k=1}^{p} r_{ik}}$.

Рассмотрим случай, когда в R и S все элементы равны 0.5.
Имеем

$$R = \begin{pmatrix} 0.5 & \dots & 0.5 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.5 & \dots & 0.5 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0.5 & \dots & 0.5 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.5 & \dots & 0.5 \end{pmatrix}$$

Следовательно $T = \begin{pmatrix} 0.5 & \dots & 0.5 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.5 & \dots & 0.5 \end{pmatrix}$, т.к. $t_{ij} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p} 0.5 \cdot 0.5}{\sum\limits_{k=1}^{p} 0.5} = 0.5$

По определению меры неопределенности $\mu(0.5) = 1$, значит, $\xi(R) = \xi(S) = \xi(T) = 1$ - максимальная степень неопределенности. Таким образом из максимально неопределенных данных мы не можем получить ничего более определенного.

Будем исследовать, как работает алгоритм с точки зрения увеличения (уменьшения) нечеткости: если у исходных данных будет более четкая информация, будет ли более четким результат?

Пусть $\mathcal{R}$—множество матриц R размера $[n \times p]$, а $\mathcal{S}$— множество матриц S $[p \times m]$, элементы которых принадлежат отрезку $[0, 1]$.

Определение 4. *Будем говорить, что пара $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ сохраняет монотонность относительно меры μ, если для любых $R_1, R_2 \in \mathcal{R}, S \in \mathcal{S}$, таких что $\xi(R_1) < \xi(R_2)$, выполнено*

$$\xi(R_1 * S) \leq \xi(R_2 * S).$$

Утверждение 1. *Чтобы исследовать монотонность в данной модели для n клиентов, необходимо и достаточно рассматривать случай с одним клиентом.*

Доказательство. 1) Пусть S - такая матрица, что выполнено условие монотонности для n клиентов. Значит для S есть монотонность для одного клиента(можно рассмотреть матрицу R, у которой все строки одинаковые, т.е. один и тот же клиент);

2) Пусть S - такая матрица, что выполнено условие монотонности для одного клиента. Значит у S есть монотонность для n клиентов, т.к. мера нечеткости

$$\xi(\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{np} \end{pmatrix} * S) = \frac{1}{n}\left(\xi((r_{11} \dots r_{1p}) * S) + \dots + \xi((r_{n1} \dots r_{np}) * S)\right).$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим все такие степени нечеткости(меры неопределенности), удовлетворяющие аксиомам $P_1 - P_4$.

Теорема 1. *Если $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ — все матрицы размера $[n \times p]$и $[p \times m]$ соответственно, элементы которых принадлежат отрезку $[0, 1]$, то не существует меры неопределенности, которая сохраняла бы монотонность для $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$.*

Доказательство. Пусть такая мера ξ существует. Значит, для любых матриц $A_1, A_2 \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S}$, таких что $\xi(A_1) < \xi(A_2)$, должно быть выполнено

$$\xi(A_1 * B) \leq \xi(A_2 * B).$$

Рассмотрим матрицы:

$$A_1 = (0, \quad a_1, \dots, a_p, b),$$
$$A_2 = (0.5, a_1, \dots, a_p, b),$$

где $a_i > 0, b > 0, i = 1, \dots, p$.

Ясно, что $\xi(A_1) < \xi(A_2)$, т.к. у них все элементы одинаковые, за исключением первых и $0 = \mu(0) < \mu(0.5) = 1$.

I. Пусть $B_1 = (1, \dots, 1, 0)^T$. Тогда имеем

$$A_1 * B_1 = \frac{\sum\limits_i a_i}{\sum\limits_i a_i + b} = t_1 \ , \ A_2 * B_1 = \frac{0.5 + \sum\limits_i a_i}{0.5 + \sum\limits_i a_i + b} = t_2.$$

Пусть a_i, b выбраны так, что $\sum\limits_i a_i \geq b$. Тогда $t_1 \geq 0.5$, $t_2 \geq 0.5$. По выбору b: $b > 0$. Значит $t_1 \leq t_2$. В итоге имеем: $0.5 \leq t_1 \leq t_2$. Значит, по определению меры:

$$\begin{array}{rcl} \mu(t_1) & \geq & \mu(t_2) \Leftrightarrow \\ \xi(A_1 * B_1) & \geq & \xi(A_2 * B_1) \end{array}$$

II. С другой стороны, рассмотрим $B_2 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Тогда $A_1 * B_2 = 0$,

$$A_2 * B_2 = \frac{0,5}{0.5 + \sum\limits_i a_i + b}$$

Значит $0 = \xi(A_1 * B_2) \leq \xi(A_2 * B_2)$. Получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi(A_1) & < & \xi(A_2), \\ \xi(A_1 * B_1) & \geq & \xi(A_2 * B_1), \\ \xi(A_1 * B_2) & \leq & \xi(A_2 * B_2). \end{array} \right.$$

Таким образом, мы получили, что какая бы ни была мера, она не сохраняет монотонность.

Теорема доказана.

Частные случаи.

Рассмотрим частные случаи, когда монотонность выполняется.

$$\xi(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{i,j} 1 - |2a_{ij} - 1|$$

1. R, S: $\sum\limits_j r_{ij} = 1$, $\sum\limits_j s_{ij} = 1$, тогда

$$T = \begin{pmatrix} (\overline{r}_1, \overline{s}_1) & \ldots & (\overline{r}_1, \overline{s}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{r}_n, \overline{s}_1) & \ldots & (\overline{r}_n, \overline{s}_m) \end{pmatrix},$$

где $\overline{r}_i$ — i-ая строка матрицы R, $\overline{s}_j$ — j-ый столбец матрицы S и $(\overline{r}_i, \overline{s}_j)$ — скалярное произведение векторов.

Утверждение 2. *Для любых матриц R, таких, что $\sum\limits_j r_{ij} = 1$ и $r_{ij} \leq 0.5$ выполнено*

$$\xi(R) = \frac{2}{p}.$$

Доказательство. $\xi(R) = \frac{1}{n \cdot p} \sum\limits_{ij} (1 + 2r_{ij} - 1) = \frac{2}{n \cdot p} \sum\limits_{ij} r_{ij} = \frac{2}{n \cdot p} \cdot n = \frac{2}{p}$

Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Для любых матриц R, таких, что $\sum\limits_j r_{ij} = 1$ и $r_{ij} \geq 0.5$ выполнено*

$$\xi(R) = \frac{2(p-1)}{p}.$$

Доказательство.
$\xi(R) = \dfrac{1}{n\cdot p}\sum_{ij}(1-2r_{ij}+1) = \dfrac{2}{n\cdot p}\sum_{ij}(1-r_{ij}) = \dfrac{2}{n\cdot p}\cdot\sum_{ij}(np-n) = \dfrac{2(p-1)}{p}$
Утверждение доказано.

Утверждение 4. *1) Пусть* $\mathcal{R} = \{R : \sum_j r_{ij} = 1, r_{ij} \le 0.5\}$, $\mathcal{S} = \{S : \sum_j s_{ij} = 1, s_{ij} \le 0.5\}$ $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ *и матрица* $S \in \mathcal{S}$ *такая что, все скалярные произведения любой строки из* $R_k, k = 1,2$ *и любого столбца из* $S \le 0.5$: $(\overline{r}_i, \overline{s}_j) \le 0.5$, *тогда*

$$\xi(R_1 * S) = \xi(R_2 * S).$$

2)Пусть $\mathcal{R} = \{R : \sum_j r_{ij} = 1, r_{ij} \ge 0.5\}$, $\mathcal{S} = \{S : \sum_j s_{ij} = 1, s_{ij} \ge 0.5\}$ $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ *и матрица* $S \in \mathcal{S}$ *такая что, все скалярные произведения любой строки из* $R_k, k = 1,2$ *и любого столбца из* $S \ge 0.5$: $(\overline{r}_i, \overline{s}_j) \ge 0.5$, *тогда*

$$\xi(R_1 * S) = \xi(R_2 * S)$$

Доказательство.
1)По условию имеем $\xi(R_1) = \xi(R_2)$. Т.к.$(\overline{r}_i, \overline{s}_j) \le 0.5$, то

$$\xi(R * S) = \frac{1}{n\cdot m}\sum_{ij}(1 - |2(\overline{r}_i, \overline{s}_j) - 1|) = \frac{2}{n\cdot m}\sum_{ij}(\overline{r}_i, \overline{s}_j)$$

Найдем $\sum_{ij}(\overline{r}_i, \overline{s}_j)$:

$$\sum_i^n\sum_j^m(\overline{r}_i, \overline{s}_j) = \sum_i^n((\overline{r}_i, \overline{s}_1) + \ldots + (\overline{r}_i, \overline{s}_m)) = \sum_i^n(\overline{r}_i, \sum_j^m \overline{s}_j) = \sum_i^n(\overline{r}_i, (1, \ldots, 1)) = n$$

Значит, $\xi(R_k * S) = \dfrac{2}{n\cdot m}\cdot n = \dfrac{2}{m}, k = 1,2$. В итоге получили:

$$\xi(R_1) = \xi(R_2),\ \xi(R_1 * S) = \xi(R_2 * S)$$

2)Доказывается аналогично.
Утверждение доказано.

Утверждение 5. $\underset{[n\times p]}{R} * \underset{[p\times m]}{S} = \underset{[n\times m]}{T}$, $\mathcal{R} = \{R : \sum_j r_{ij} = 1\}$. *Тогда* $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m t_{ij} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^p r_{ik}\alpha_k$, *где* α_k *- сумма элементов k-той строки в* S.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m t_{ij} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^p r_{ik}s_{kj} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^m r_{ik}s_{kj} =$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^p r_{ik}(\sum_{j=1}^m s_{kj}) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^p r_{ik}\alpha_k.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 6. ***Необходимое условие монотонности***
$\mathcal{R} = \{R : R = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0, 1-x, 0, \dots, 0)\}$
Пусть $\mathcal{S}$ содержит матрицу S, такую, что в ней есть две строки $\beta, \gamma : \xi(\beta) \neq \xi(\gamma)$. Тогда для пары $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ нет монотонности.

Доказательство.

Пусть S - матрица, удовлетворяющая условию. Без ограничения общности $\xi(\beta) < \xi(\gamma)$. Рассмотрим

$$R_1 = (0, \dots, 0, \underset{\beta}{0}, 0, \dots, 0, \underset{\gamma}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$R_2 = (0, \dots, 0, \underset{\beta}{1-\varepsilon}, 0, \dots, 0, \underset{\gamma}{\varepsilon}, 0, \dots, 0)$$

$$\xi(R_1) = 0,\ \xi(R_2) = \frac{4\varepsilon}{p},\ \xi(R_1 * S) = \xi(\gamma),$$
$$\xi(R_2 * S) = \xi((1-\varepsilon)\beta + \varepsilon\gamma) = \xi(\beta + \varepsilon(\gamma - \beta)).$$

Т.к. ξ - непрерывная функция, то для некоторого малого ε выполнено:

$$|\xi(\beta + \varepsilon(\gamma - \beta)) - \xi(\beta)| < \xi(\gamma) - \xi(\beta)$$
$$\Rightarrow \xi(\beta + \varepsilon(\gamma - \beta)) < \xi(\gamma)$$
$$\Rightarrow \xi(R_1 * S) > \xi(R_2 * S).$$

Утверждение доказано.

4.2 Модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях с применением минимаксной композиции

Как видно из Теоремы 1, используемые в модели операции не позволяют гарантировать сохранение монотонности степени нечеткости. В теории нечетких множеств для получения композиции нечетких отношений используется min-max-ная композиция. Это специальное умножение матриц, в котором умножение заменяется на min, а сумма - на max.

Здесь мы пытаемся изучить сохранение монотонности для таких операций, т.к. они являются стандартными для нечетких моделей. Кроме того, минимаксная композиция - основа систем нечеткого логического вывода и является наиболее распространенной, классической композицией в теории нечетких множеств.

Определение 5. *Пусть даны две матрицы A и B*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix}$$

Минимаксной композицией $A \odot B$ двух матриц называется такая матрица C:

$$A \odot B = C,\ \ C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm}, \end{pmatrix}$$

элементы которой представляются в виде: $c_{ij} = \max(\min(a_{i1}, b_{1j}), \dots, \min(a_{ip}, b_{pj}))$.

Теорема 2. *Если $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ — все матрицы размера $[n \times p]$ и $[p \times m]$ соответственно, то не существует меры неопределенности, которая сохраняла бы монтонность для $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ в случае минимаксной композиции матриц*

Доказательство. Рассмотрим матрицы $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ и $B \in \mathcal{S}$

$$A_1 = (a_1^1, \dots, a_p^1), \quad A_2 = (a_1^2, \dots, a_p^2)$$

Пусть $\max(a_i^1) = M_1 < 0.5$, $\max(a_i^2) = M_2 < 0.5$ и пусть

$$\begin{array}{rcl} \xi(A_1) & \leq & \xi(A_2) \Leftrightarrow \\ \sum 1 - |1 - 2a_i^1| & \leq & \sum 1 - |1 - 2a_i^2| \Leftrightarrow \\ a_1^1 + \dots + a_p^1 & \leq & a_1^2 + \dots + a_p^2, \qquad \text{т.к.} M_1, M_2 < 0.5 \\ & . & \end{array}$$

Пусть в $B = (b_1, \dots, b_p)$ - все элементы ненулевые и $\min b_i > \max a_i$.

$$A_1 \odot B = \max\left(\min(a_1^1, b_1), \dots, \min(a_p^1, b_p)\right) = \max(a_1^1, \dots, a_p^1) = M_1 < 0.5.$$

$$A_2 \odot B = \max\left(\min(a_1^2, b_1), \dots, \min(a_p^2, b_p)\right) = \max(a_1^2, \dots, a_p^2) = M_2 < 0.5.$$

Пусть $M_1 > M_2$.

$$\begin{array}{l} A_1 = (a_0, 0, \dots, 0) \\ A_2 = (\frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2}, \dots, \frac{a_0}{2}) \end{array}$$

В данном случае $M_1 = a_0$, $M_2 = \dfrac{a_0}{2}$ и $M_1 > M_2$. Следовательно, $\xi(A_1) = a_0$, $\xi(A_2) = p \cdot a_0$, $\xi(A_1) \leq \xi(A_2)$, т.к. $p \geq 2$

В итоге имеем
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi(A_1) & \leq & \xi(A_2), \\ \xi(A_1 \odot B) & \geq & \xi(A_1 \odot B). \end{array} \right.$$

Мы можем подобрать элементы в A_1 и A_2 таким образом, чтобы $M_1 > M_2$, и можно подобрать так, чтобы $M_1 < M_2$. Значит, монотонность не сохраняется. Теорема доказана.

5. Устойчивость

При практическом применении любой математической модели важным аспектом является ее устойчивость. Так как исходные параметры могут быть измеренными с какой-то степенью точностью, возникают ошибки измерения. Если модель чувствительна к такого рода естественным ошибкам, вопрос практического ее применения требует дополнительных верификаций.

Рассмотрим ситуацию, когда исходные матрицы заданы не точно, а с некоторой малой погрешностью $\delta > 0$.

Пусть $A = (a_{ij})$ - матрица. Обозначение:

$$A^\delta = (a_{ij}^\delta), \text{где } a_{ij}^\delta \in [a_{ij} - \delta, a_{ij} + \delta]$$

$$A^{+\delta} = (a_{ij} + \delta), \; A^{-\delta} = (a_{ij} - \delta).$$

Ясно, что $A^{-\delta} \leq A^\delta \leq A^{+\delta}$. Пусть $\alpha = a_1 + \ldots + a_p$.

В рамках нашей модели имеем: $A = (a_1, \dots, a_p)$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix}$.

Попытаемся получить точные верхние и нижние оценки для $A^\delta * B$ и $A * B^\delta$.

5.1 Устойчивость по первому параметру

Рассмотрим матрицу $A^\delta = (a_1 + \beta_1, \dots, a_p + \beta_p)$, где $\beta_i \in [-\delta, +\delta]$

Пусть $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_p$. По определению операции * имеем:

$$A * B = \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i b_{im}}{\alpha} \right),$$

$$A^\delta * B = \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} (a_i + \beta_i) b_{i1}}{\alpha + \beta}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^{p} (a_i + \beta_i) b_{im}}{\alpha + \beta} \right).$$

Преобразуем выражение для членов $A^\delta * B$. Без ограничения общности рассмотрим первый член:

$$\frac{\sum_{i=1}^{p}(a_i + \beta_i) b_{i1}}{\alpha + \beta} = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^{p}(a_i + \beta_i) b_{i1}}{\alpha + \beta} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha} - \frac{\beta \sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha(\alpha + \beta)} + \frac{\sum_{i=1}^{p} \beta_i b_{i1}}{\alpha + \beta} = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^{p} (\beta_i - \frac{\beta}{\alpha} a_i) b_{i1}}{\alpha + \beta}$$

1) Оценим сверху остаточный член $\dfrac{\sum_{i=1}^{p} (\beta_i - \frac{\beta}{\alpha} a_i) b_{i1}}{\alpha + \beta}$

Пусть все $\beta_i \geq 0$. Мы это можем предположить, т.к. оцениваем сверху. Тогда $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_p \geq 0$. Но тогда $\frac{1}{\alpha + \beta} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Для остаточного члена имеем:

$$\frac{1}{\alpha + \beta} \sum_{i=1}^{p} (\beta_i - \frac{\beta}{\alpha} a_i) b_{i1} \quad \leq \quad \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{p} (\beta_i - \frac{\beta}{\alpha} a_i) b_{i1} \quad \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{p} (\delta + \frac{p\delta}{\alpha} a_i) b_{i1} \quad \overset{(2)}{\leq}$$

$$\overset{(2)}{\leq} \quad \frac{\delta}{\alpha} \sum_{i=1}^{p} (1 + \frac{p}{\alpha} a_i) \quad = \quad \frac{\delta}{\alpha} \sum_{i=1}^{p} 1 + \frac{\delta p}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{p} a_i \quad = \quad \frac{\delta p}{\alpha} + \frac{\delta p}{\alpha^2} \alpha \quad = \quad \frac{2\delta p}{\alpha},$$

где $(1) : \beta_i < \delta, -p\delta \leq \beta \leq p\delta \quad (2) : b_{i1} \in [0, 1]. \Rightarrow b_{i1} \leq 1$

Значит, $\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i+\beta_i)b_{i1}}{\alpha+\beta} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha} + \frac{2\delta p}{\alpha}$

2) Аналогично оценивается снизу остаточный член:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i+\beta_i)b_{i1}}{\alpha+\beta} \ge \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha} - \frac{2\delta p}{\alpha}$$

3) В итоге имеем:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha} - \frac{2\delta p}{\alpha} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i+\beta_i)b_{i1}}{\alpha+\beta} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha} + \frac{2\delta p}{\alpha}$$

Следовательно, получили устойчивость:

$$A * B - \frac{2\delta p}{\alpha}M^1 \le A^\delta * B \le A * B + \frac{2\delta p}{\alpha}M^1,$$

где M^1 - матрица, состоящая из единиц.

5.2 Устойчивость по второму параметру

Рассмотрим матрицу $B^\delta = \begin{pmatrix} b_{11}+\beta_{11} & \dots & b_{1m}+\beta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}+\beta_{p1} & \dots & b_{pm}+\beta_{pm} \end{pmatrix}$, где $\beta_{ij} \in [-\delta, +\delta]$

Пусть $\beta = \beta_{11} + \ldots + \beta_{pm}$.

По определению операции * имеем:

$$A * B = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha}, \ldots, \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_{im}}{\alpha} \right),$$

$$A * B^\delta = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_i(b_{i1}+\beta_{i1})}{\alpha}, \ldots, \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_i(b_{im}+\beta_{im})}{\alpha} \right),$$

$$A * B^{+\delta} = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_i(b_{i1}+\delta)}{\alpha}, \ldots, \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_i(b_{im}+\delta)}{\alpha} \right),$$

$$A * B^{-\delta} = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(b_{i1} - \delta)}{\alpha}, \ldots, \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(b_{im} - \delta)}{\alpha} \right).$$

1) Сравним члены строки $A * B^{\delta}$ и строки $A * B^{+\delta}$. Без ограничения общности рассмотрим первые элементы строк:

$$\alpha \cdot \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(b_{i1} + \beta_{i1})}{\alpha} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(b_{i1} + \delta)}{\alpha} \right) = \sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1} + \sum_{i=1}^{p} a_i \beta_{i1} - \sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1} - \delta \sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i \beta_{i1} - \alpha\delta$$

Пусть все $\beta_{ij} > 0$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i \beta_{i1} \le \delta$, $\sum_{i=1}^{p} a_i = \delta\alpha$.

Значит $\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(b_{i1} + \beta_{i1})}{\alpha} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(b_{i1} + \delta)}{\alpha}$, т.е. $A * B^{\delta} \le A * B^{+\delta}$

2) Аналогично сравнивая члены строки $A * B^{\delta}$ и строки $A * B^{-\delta}$ получаем: $A * B^{\delta} \ge A * B^{-\delta}$

3) В итоге получили: $A * B^{-\delta} \le A * B^{\delta} \le A * B^{+\delta}$

Рассмотрим члены строки $A * B^{\delta}$. Без ограничения общности будем рассматривать первый член:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(b_{i1} + \delta)}{\alpha} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha} + \delta \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i}{\alpha} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha} + \delta$$

Обозначение: M^1 - матрица, состоящая из всех единиц.
Тогда $A * B^{+\delta} = A * B + \delta M^1$. Аналогично $A * B^{-\delta} = A * B - \delta M^1$
Следовательно, получили устойчивость

$$A * B - \delta M^1 \le A * B^{\delta} \le A * B + \delta M^1$$

Список литературы

[1] А.П.Рыжов. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. Диалог-МГУ, Москва, 1998.

[2] А.П.Рыжов. Степень нечеткости лингвистической шкалы и ее свойства. Нечеткие системы поддержки принятия решений. Под редакцией Аверкина А.Н. и др., стр. 82 – 92, 1988.

[3] А.П.Рыжов. Об одном методе оптимального описания объектов и ситуаций в интеллектуальных системах. Создание и применение гибридных экспертных систем : Тезисы докладов Всесоюзной конференции, Рига, 34(1):62 – 64, Ноябрь 1990.

[4] Й.Леунг. Разделение на торговые зоны в нечетких условиях. Теория возможностей и ее применение. Наука, М., 1992.

[5] Г.А.Гунин. Особенности практического применения искусственных нейронных сетей к прогнозу финансовых временных рядов. Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении, 2001.

[6] В.В.Ведерников. Нечетко-множественное моделирование в анализе и прогнозировании экономических явлений и процессов: исторический аспект. Евразийский международный научно-аналитический журнал, 1/2(17/18), 2006.

[7] Aliev R.A. Modelling and stability analysis in fuzzy economics. Applied and Computational Mathematics. Vol.7, No.1,2008.

[8] G. Bojadziev. Fuzzy logic for business, finance and management. Advances in Fuzzy Systems, 12, 1997.

[9] J. Buckley. The fuzzy mathematics of finance. Fuzzy Sets and Systems, 21, 1987.

[10] J. Buckley. Solving fuzzy equations in economics and finance. Fuzzy Sets and Systems, 48, 1992.

[11] C. V. Negoita. On the application of the fuzzy sets separation theorem for automatic classification in information retrieval systems. Inf. Sci., 5:279–286, 1973.

[12] K. Peray. Investing in mutual funds using fuzzy logic. St. Lucie Press, USA, 1999.

[13] J. S. Pipkin. Fuzzy sets and spatial choice. Ann. Assoc. Am. Geographers, 68:196–204, 1978.

[14] C. Ponsard. Fuzzy economic spaces. Document de travail No.43. Institute de Mathematiques Economiques,, Universite de Dijon, 1980.

[15] C. Ponsard. Produser's spatial equilibrium with a fuzzy constraint. Document de travail No.46. Institute de Mathematiques Economiques,, Universite de Dijon, 1980.

[16] A. Pred. Behavior and location. Part I.The Royal University of Lund, pages 110–120, 1967.

[17] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. Information and Control, 8(1):338 – 353, November 1965.

[18] H. Zimmerman. Fuzzy Sets Theory - and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[19] C. Zopounidis and oth. Fuzzy Sets in Management, Economy and Marketing. World Scientific Pub Co, ISBN 10247532, 2002.